CAPÍTULO 3

FUNÇÕES REAIS DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

3.1 Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Vamos agora tratar do segundo caso particular de funções $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que são as funções reais de várias variáveis reais. Neste caso, temos que $m = 1$ e $n \geq 2$, i.e. o domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, enquanto que o contradomínio é um subconjunto da reta .

DEFINIÇÃO 3.1.1: Dado $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, uma *função real f de várias variáveis reais* é uma correspondência, $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que a cada ponto $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in Dom(f)$, associa um e apenas um $y = f(X) \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.1: Abaixo temos alguns exemplos de funções reais de várias variáveis, com $n = 2$ ((a) e (b)) e $n = 3$ ((c) e (d)).
a) $f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
b) $g(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
c) $h(x, y, z) = x + y + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
d) $w(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0, 0, 0)\}$.

Conforme mencionado, o conjunto $Dom(f)$ é chamado de *domínio* da função f. Além disso, continuaremos abusando da linguagem, conforme mencionado nas aulas anteriores. Isto é, quando a função f for dada por sua expressão e fizermos a pergunta: *"qual é o domínio da função f?"* Estaremos de fato perguntando: *"qual é o maior subconjunto de $\mathbb{R}^n$, no qual f está bem definida?"*, ou seja, *"qual é o maior subconjunto $Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que $f(X)$ é um elemento de $\mathbb{R}$, para todo $X \in Dom(f)$?"*

3.2 Operações com Funções Reais de Várias Variáveis Reais

Definiremos a seguir as usuais operações de soma, diferença, produto e quociente, da mesma forma que fizemos para funções reais de uma variável.

DEFINIÇÃO 3.2.1: Considere as funções $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $f + g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *soma de f e g*, dada por

$$(f + g)(X) = f(X) + g(X), \forall\, X \in D;$$

b) a função $f - g : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *diferença entre f e g*, dada por

$$(f - g)(X) = f(X) - g(X), \forall\, X \in D;$$

c) a função $kf : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *produto de f pela constante k*, dada por

$$(kf)(X) = kf(X), \forall\, X \in D;$$

d) a função $fg : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *produto de f pela função g*, dada por

$$(fg)(X) = f(X)g(X), \forall\, X \in D;$$

e) se $g(X) \neq 0$, $\forall X \in D$, a função $\dfrac{f}{g} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *quociente de f pela função g*, dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)}, \forall\, X \in D.$$

Caso exista $X \in D$, tal que $g(X) = 0$, mas o conjunto $D_1 = \{X \in D \mid g(X) \neq 0\}$ seja não vazio, podemos definir a função quociente no conjunto D_1, i.e.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)}, \forall\, X \in D_1.$$

Vamos inicialmente nos concentrar em funções reais de apenas duas variáveis reais.

3.3 Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Vamos trabalhar nesta seção apenas com funções reais de duas variáveis reais. Isto é, vamos trabalhar com funções f da forma

$$\begin{array}{rccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \mapsto & f(x, y). \end{array}$$

Vamos iniciar identificando e esboçando o domínio de algumas funções de duas variáveis reais.

Exemplo 3.3.1: Determine e esboce o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

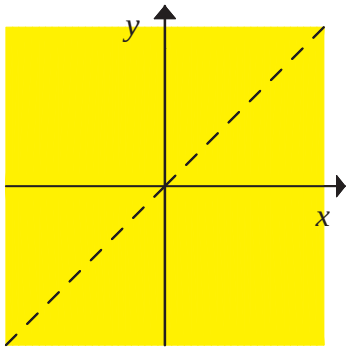
a) $f_1(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$.
b) $f_2(x,y) = \sqrt{y-x} + \sqrt{1-y}$.
c) $f_3(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$.
d) $f_4(x,y) = \sqrt{x^2-y^2-1}$.
e) $f_5(x,y) = \dfrac{y}{x-1}$.
f) $f_6(x,y) = \ln(xy-1)$.

Solução:

a) Neste caso, como o termo $x-y$ aparece no denominador da expressão de f_1, devemos ter $x-y \neq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq x\}.$$

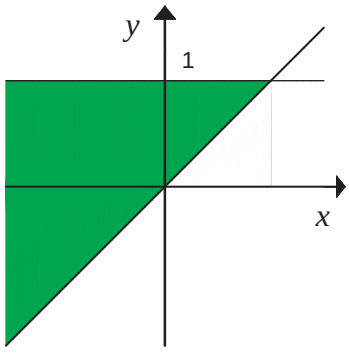
Temos portanto, que o domínio da função é todo plano xy, excetuando a reta $y = x$ (figura ao lado).



b) Neste caso, para podermos calcular as duas raízes que aparecem na expressão de f_2, devemos ter $y - x \geq 0$ e $1 - y \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x \ \text{ e } \ y \leq 1\}.$$

Ao lado, temos um esboço de $Dom(f_2)$, que é a região acima da reta $y = x$ e abaixo da reta $y = 1$.



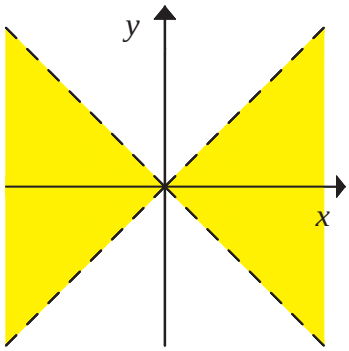
c) Neste caso, para podermos calcular a raiz que aparece na expressão de f_3, devemos ter $x^2-y^2 \geq 0$. Além disso, como o termo $\sqrt{x^2-y^2}$ está no denominador da função f_3, é necessário ter $x^2-y^2 \neq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2 > 0\}.$$

Como $x^2-y^2 > 0 \Leftrightarrow y^2 < x^2 \Leftrightarrow |y| < |x| \Leftrightarrow -|x| < y < |x|$, temos que

$$Dom(f_3) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -|x| < y < |x|\}.$$

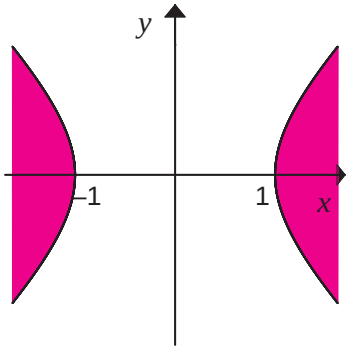
Ao lado, temos um esboço do domínio da função f, que é a região compreendida entre $y = |x|$ e $y = -|x|$.



d) Neste caso, para podermos calcular a raiz que aparece na expressão de f_4, devemos ter $x^2-y^2-1 \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_4) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2-y^2 \geq 1\}.$$

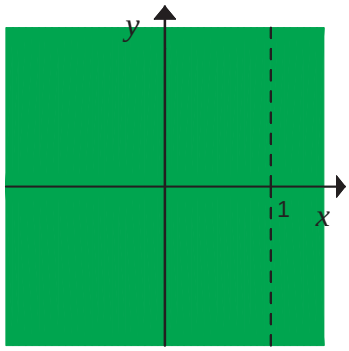
Ao lado, temos um esboço de $Dom(f_4)$, que é a região do plano determinada pela hipérbole $x^2-y^2 = 1$ que não contém a origem.



e) Neste caso, como o termo $x-1$ aparece no denominador da expressão de f_5, devemos ter $x-1 \neq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_5) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}.$$

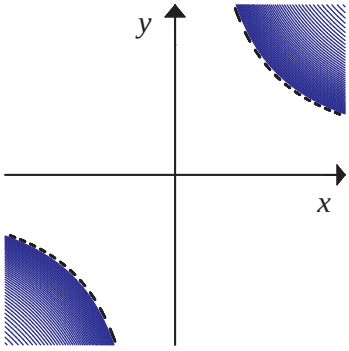
Temos portanto, que o domínio da função é todo plano xy, excetuando a reta $x = 1$ (figura ao lado).



f) Neste caso, como o termo $xy-1$ aparece como argumento do logaritmo natural na expressão de f_6, devemos ter $xy-1 > 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}.$$

Ao lado, temos um esboço de $Dom(f_6)$, que é a região do plano determinada pela hipérbole $xy = 1$ que não contém a origem.



♡

3.4 Exemplos Alguns Tipos de Funções Reais de Duas Variáveis Reais

Veremos a seguir exemplos de alguns tipos de funções reais de duas variáveis reais.

Exemplo 3.4.1: (Função Polinomial) Uma *função polinomial* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \sum_{m+n \leq p} a_{mn} x^n y^m,$$

onde p é um natural fixo e os coeficientes a_{mn} são números reais dados. A soma é estendida a todas soluções (m, n), m e n naturais, da inequação $m + n \leq p$.

Exemplo: $f(x, y) = 2x^5y^2 + x^2y^3$.

Exemplo 3.4.2: (Função Afim) Uma *função afim* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by + c,$$

onde a, b e c são números reais dados. A função afim é um caso particular de uma função polinomial. Observe que o gráfico de uma função afim de duas variáveis reais é um plano.

Exemplo: $f(x, y) = 2x + 7y + \sqrt{6}$.

Exemplo 3.4.3: (Função Linear) Uma *função linear* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = ax + by,$$

onde a e b são números reais dados. A função linear é um caso particular de uma função afim. Observe que o gráfico de uma função linear de duas variáveis reais é um plano que contém a origem.

Exemplo: $f(x, y) = 2x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, y$.

Exemplo 3.4.4: (Função Racional) Uma *função racional* de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

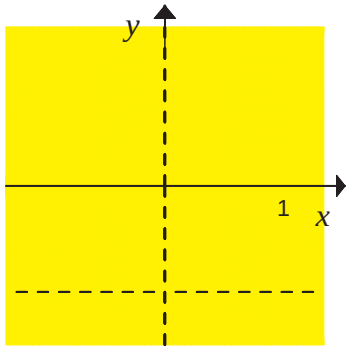
$$f(x, y) = \frac{p(x, y)}{q(x, y)},$$

onde p e q são funções polinomiais dadas. Temos, neste caso, que $Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, q(x,y) \neq 0\}$.

Exemplo: $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 + 7y^3}{xy + x}$. Observe que

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x(y+1) \neq 0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \text{ e } y \neq -1\} \end{aligned}$$

Temos portanto, que o domínio da função é todo plano xy, excetuando as retas $x = 0$ e $y = -1$ (figura ao lado).



3.5 Curvas de Nível de Funções Reais de Duas Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, dado $k \in Im(f)$, temos que o conjunto de nível da função f correspondente ao nível k é o subconjunto do domínio dado por

$$C_k(f) = \{(x,y) \in Dom(f) \,|\, f(x,y) = k\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de duas variáveis reais, os conjuntos de nível de f são curvas. Por este motivo, os conjuntos de nível de funções reais de duas variáveis reais são chamados de *curvas de nível*. Em alguns casos, para certos valores de k, pode acontecer das curvas de nível se degenerarem em pontos, conforme veremos nos exemplos. Conforme mencionado, as curvas de nível são muito úteis para se ter uma visão do comportamento da função. Isto porque, elas nos fornecem todos os pontos do domínio que possuem a mesma imagem. Desta forma, se, para valores significativos de k na imagem da função, conhecêssemos suas curvas de nível k, poderíamos ter uma boa ideia do gráfico de f, pelo menos de uma forma discretizada. Para isto, "pegaríamos" as curva de nível de f referentes a k e as "colocaríamos" no plano $z = k$.

Observação 3.5.1: Como sabemos que f é constante ao longo das curvas de nível, observe que duas curvas de nível de uma função f correspondentes aos níveis k_1 e k_2, onde $k_1 \neq k_2$, não podem se interceptar.

Vamos agora fazer alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1: Determine e esboce as curvas de nível das funções dadas abaixo.

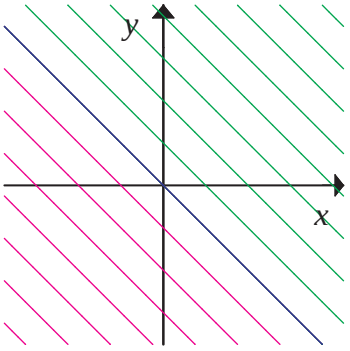
a) $f_1(x,y) = x + y$.
b) $f_2(x,y) = x^2 + y^2$.
c) $f_3(x,y) = y^2 - x^2$.
d) $f_4(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
e) $f_5(x,y) = 1 - y^2$.
f) $f_6(x,y) = \dfrac{y}{x-1}$.
g) $f_7(x,y) = \ln(xy - 1)$.

Solução:

a) Neste caso, observe que $Dom(f_1) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_1) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_1 é dado por

$$C_k(f_1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = k\}.$$

Ou seja, as curvas de nível k de f_1 são retas $x + y = k$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a reta $y = -x$;
para $k = 1$, temos a reta $y = -x + 1$;
para $k = 2$, temos a reta $y = -x + 2$;
para $k = -1$, temos a reta $y = -x - 1$;
para $k = -2$, temos a reta $y = -x - 2$.
As curvas de nível de f_1 encontram-se esboçadas abaixo. A curva de nível $k = 0$ está esboçada em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.

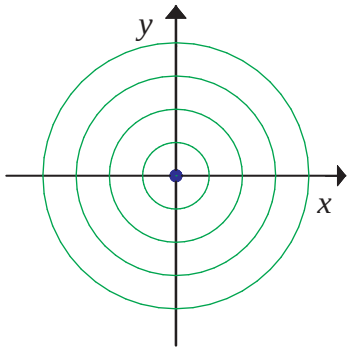


b) Neste caso, observe que $Dom(f_2) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_2) = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z \geq 0\}$. Desta forma, temos que, para todo $k \geq 0$ real, o conjunto de nível k de f_2 é dado por

$$C_k(f_2) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = k\}.$$

Observe que, para $k = 0$, temos apenas o ponto $(0,0)$, i.e. $C_0(f_2) = \{(0,0)\}$. Já para $k > 0$, temos que as curvas de nível $k > 0$ de f_2 são circunferências $x^2 + y^2 = k$, i. e. circunferências de raio $\sqrt{k}$ e centro na origem. Por exemplo,
para $k = 1$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 1$;
para $k = 2$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 2$;
para $k = 3$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 3$;
para $k = 4$, temos a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.
As curvas de nível de f_2 encontram-se esboçadas abaixo. A curva de nível $k = 0$ (a

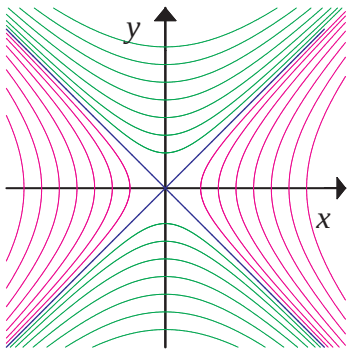
origem) está esboçada em azul e as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde.



c) Neste caso, observe que $Dom(f_3) = \mathbb{R}^2$ e que $Im(f_3) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_3 é dado por

$$C_k(f_3) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 - x^2 = k\}.$$

Observe que, para $k = 0$, temos que $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow |y| = |x| \Leftrightarrow y = x$ ou $y = -x$, i.e. as curvas de nível zero são as retas $y = x$ e $y = -x$. Já para $k > 0$, temos que as curvas de nível $k > 0$ de f_3 são as hipérboles $y^2 - x^2 = k > 0$, i. e. hipérboles cujos focos estão no eixo y. Contudo, para $k < 0$, temos que as curvas de nível $k < 0$ de f_3 são as hipérboles $y^2 - x^2 = k < 0$, i. e. hipérboles cujos focos estão no eixo x. Por exemplo,
para $k = 0$, temos as retas $y = x$ e $y = -x$;
para $k = 1$, temos a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$;
para $k = 2$, temos a hipérbole $y^2 - x^2 = 2$;
para $k = -1$, temos a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$;
para $k = -2$, temos a hipérbole $x^2 - y^2 = 2$.
As curvas de nível de f_3 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ (retas) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.



d) Neste caso, observe que $Dom(f_4) = \mathbb{R}^2$. Quanto à imagem de f_4, note que

$$-(x^2 + y^2) \leq 0, \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Desta forma, tomando a exponencial de ambos os lados da inequação, encontramos que $e^{-(x^2+y^2)} \leq 1$, $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, como a função exponencial é sempre maior

do que zero, temos que

$$0 < e^{-(x^2+y^2)} \leq 1, \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Concluímos assim que, $Im(f_4) = (0,1]$. Portanto, se $k \in (0,1]$, o conjunto de nível k de f_4 é dado por

$$C_k(f_4) \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{-(x^2+y^2)} = k\right\}$$

Observe que

$$e^{-(x^2+y^2)} = k \Leftrightarrow -(x^2+y^2) = \ln k \Leftrightarrow x^2+y^2 = -\ln k.$$

Desta forma, para $k = 1$, temos que

$$x^2+y^2 = -\ln 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ e } y = 0,$$

de modo que

$$C_1(f_4) = \{(0,0)\}$$

e, para $k \in (0,1)$, temos que

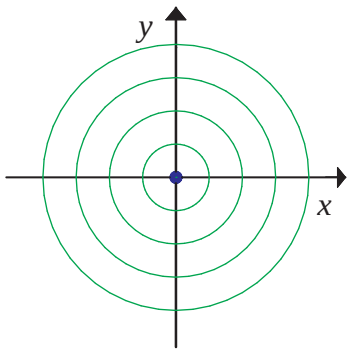
$$C_k(f_4) \;=\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 = -\ln k = \ln\frac{1}{k}\right\},$$

isto é, as curvas de nível k de f_4, para $k \in (0,1)$ são circunferências de centro na origem e raio $\sqrt{-\ln k} = \sqrt{\ln\dfrac{1}{k}}$.

Vejamos a seguir exemplos de algumas curvas de nível de f_4.

Para $k = 1$, temos o ponto $(x,y) = (0,0)$;
para $k = 1/2$, temos a circunferência $x^2+y^2 = -\ln\dfrac{1}{2} = \ln 2$;
para $k = 1/6$, temos a circunferência $x^2+y^2 = -\ln\dfrac{1}{6} = \ln 6$;
para $k = 1/10$, temos a circunferência $x^2+y^2 = -\ln\dfrac{1}{10} = \ln 10$.

As curvas de nível de f_4 encontram-se esboçadas abaixo.



Observe que precisamos fazer pequenas manipulações para encontrar a imagem de f_4. Caso tivéssemos tido alguma dificuldade em descobrir que $0 < e^{-(x^2+y^2)} < 1$,

$\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, um procedimento que podemos adotar é supor que k é um elemento na imagem da função e partir para a descoberta dos conjuntos de nível. No caso, apenas suporíamos que $k \in Im(f_4)$ e tentaríamos resolver a equação $e^{-(x^2+y^2)} = k$. Durante o processo, as restrições sobre k se evidenciariam. De fato, constatamos que só há soluções $(x,y) \in Dom(f_4) = \mathbb{R}^2$ para a equação

$$e^{-(x^2+y^2)} = k \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -\ln k,$$

quando $-\ln k \geq 0$. Desta forma, devemos ter

$$-\ln k \geq 0 \Leftrightarrow \ln k \leq 0 \Leftrightarrow 0 < k \leq 1.$$

O que fizemos de uma forma reversa foi descobrir que solucionamos a equação $e^{-(x^2+y^2)} = k$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se e somente se $0 < k \leq 1$. Isto equivale a dizer que $Im(f_4) = (0,1]$.

e) Neste caso, observe que $Dom(f_5) = \mathbb{R}^2$. Quanto à imagem de f_5, como $y^2 \geq 0$, $\forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que $-y^2 \leq 0$, $\forall\ (x,y)$, ou seja, $1 - y^2 \leq 1$, $\forall\ (x,y)$. Desta forma, temos que $Im(f_5) = (-\infty, 1]$. Portanto, se $k \in (-\infty, 1]$,o conjunto de nível k de f_5 é dado por

$$C_k(f_5) \ = \ \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ 1 - y^2 = k \right\}.$$

Desta forma, para $k = 1$, temos que

$$C_1(f_5) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ y = 0 \right\}$$

e para $k \in (-\infty, 1)$, temos que

$$C_k(f_5) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ y = \sqrt{1-k} \text{ ou } y = -\sqrt{1-k} \right\}.$$

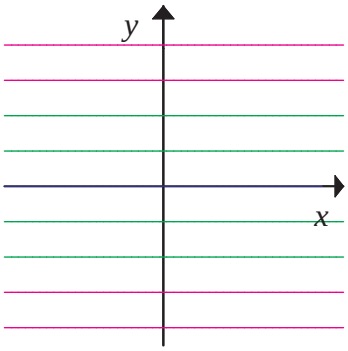
Ou seja, o conjunto de nível $k = 1$ de f_5 é o eixo x e o conjunto de nível k de f_5, para $k \in (-\infty, 1)$ é formado pelas retas $y = \sqrt{1-k}$ e $y = -\sqrt{1-k}$.

Vejamos a seguir exemplos de algumas curvas de nível de f_5.

Para $k = 1$, temos a reta $y = 0$;
para $k = 1/2$, temos as retas $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
para $k = 1/6$, temos as retas $y = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ $y = -\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$;
para $k = 1/10$, temos as retas $y = \dfrac{9\sqrt{10}}{10}$ e $y = -\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$;
para $k = -1/20$, temos as retas $y = \dfrac{11\sqrt{5}}{10}$ e $y = -\dfrac{11\sqrt{5}}{10}$;

As curvas de nível de f_5 encontram-se esboçadas abaixo. Os conjuntos de nível $k = 0$ estão esboçadas em azul, os conjuntos de nível $0 < k < 1$ estão esboçadas em verde e

os conjuntos de nível $-\infty < k < 0$ estão esboçadas em rosa.



Se tivéssemos tido dificuldade em encontrar a imagem de f_5, poderíamos ter utilizado a sugestão dada no item anterior. Isto é, apenas suporíamos que $k \in Im(f_5)$ e tentaríamos descobrir as curvas de nível k de f_5. Desta forma, teríamos que solucionar $1 - y^2 = k$. Neste processo, ao tentarmos resolver a equação $1 - y^2 = k$, constatamos que só há soluções $(x, y) \in Dom(f_5) = \mathbb{R}^2$ para a equação

$$1 - y^2 = k \Leftrightarrow y^2 = 1 - k,$$

quando $k \in (-\infty, 1]$. A tradução deste resultado é de que $Im(f_5) = (-\infty, 1]$.

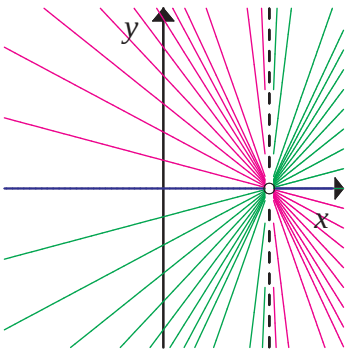
f) Neste caso, observe que

$$Dom(f_6) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$$

e que $Im(f_6) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, o conjunto de nível k de f_6 é dado por

$$C_k(f_6) = \{(x, y) \in Dom(f_6) \,|\, y = k(x - 1)\},$$

ou seja, as curvas de nível k de f_6 são retas $y = k(x - 1)$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a reta $y = 0$;
para $k = 1$, temos a reta $y = x - 1$;
para $k = 2$, temos a reta $y = 2x - 2$;
para $k = -1$, temos a reta $y = -x + 1$;
para $k = -2$, temos a reta $y = -2x + 2$.
As curvas de nível de f_6 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ (semi-retas) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ (semi-retas) estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ (semi-retas) estão esboçadas em rosa.



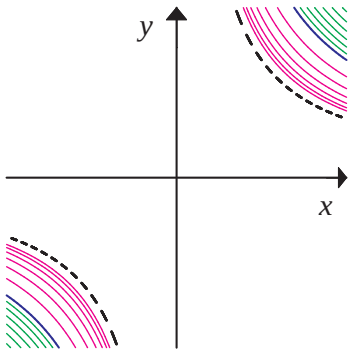
g) Neste caso, observe que

$$Dom(f_7) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}$$

e que $Im(f_7) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que, para todo k real, o conjunto de nível k de f_7 é dado por

$$C_k(f_7) = \{(x, y) \in Dom(f_7) \,|\, \ln(xy - 1) = k\}.$$

Como $\ln(xy-1) = k \Leftrightarrow xy - 1 = e^k \Leftrightarrow xy = 1 + e^k$, temos que as curvas de nível k de f são as hipérboles $xy = 1 + e^k$. Por exemplo,
para $k = 0$, temos a hipérbole $xy = 2$;
para $k = 1$, temos a hipérbole $xy = 1 + e$;
para $k = 2$, temos a hipérbole $xy = 1 + e^2$;
para $k = -1$, temos a hipérbole $y = xy = 1 + \dfrac{1}{e}$;
para $k = -2$, temos a hipérbole $y = xy = 1 + \dfrac{1}{e^2}$.
As curvas de nível de f_7 encontram-se esboçadas abaixo. As curvas de nível $k = 0$ estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 0$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $k < 0$ estão esboçadas em rosa.



Vamos agora passar aos gráficos de funções reais de duas variáveis. Portanto, é interessante que você faça uma revisão de planos, cilindros, esferas, superfícies de revolução e superfícies quádricas em geral. No Apêndice 1, temos uma revisão destes tópicos. Não deixe de estudá-los.

3.6 Gráficos de Funções Reais de Duas Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, temos que o gráfico da função f é o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in Dom(f)\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de duas variáveis reais, atente para o fato de que os gráficos destas funções estão em $\mathbb{R}^3$.

A representação geométrica do gráfico de uma função de duas variáveis é uma tarefa que pode ser muito difícil. Por isto, em alguns casos nos contentamos em visualizar as curvas de nível. Vamos agora fazer alguns exemplos que não estão entre os mais difíceis.

Exemplo 3.6.1: Determine e esboce os gráficos das funções dadas abaixo. Use as curvas de nível encontradas no Exemplo 3.5.1, se achar necessário.

a) $h_1(x, y) = x + y$.
b) $h_2(x, y) = x^2 + y^2$.
c) $h_3(x, y) = y^2 - x^2$.
d) $h_4(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.
e) $h_5(x, y) = 1 - y^2$.
f) $h_6(x, y) = \dfrac{y}{x-1}$.
g) $h_7(x, y) = \ln(xy - 1)$.

Solução:

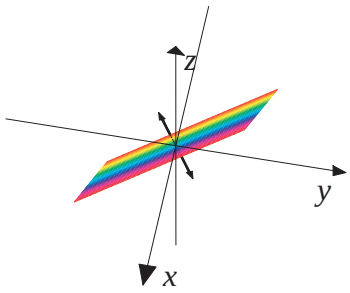
a) Temos que o gráfico de h_1 é dado por

$$Gr(h_1) = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos portanto, que o gráfico da função é o plano

$$z = x + y,$$

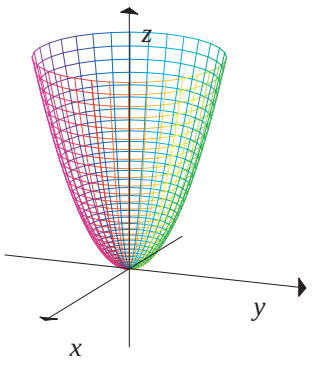
que é o plano que contém a origem e é perpendicular aos vetores $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$ (figura ao lado).

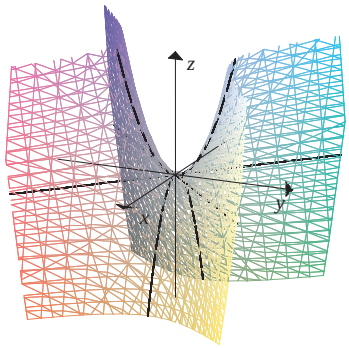


b) Temos que o gráfico de h_2 é dado por

$$Gr(h_2) = \{(x, y, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos portanto, que o gráfico da função é o parabolóide $z = x^2 + y^2$ (figura ao lado).





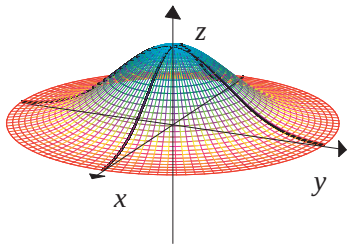
c) Temos que o gráfico de h_3 é dado por

$$Gr(h_3) = \{(x, y, y^2 - x^2) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Temos portanto, que o gráfico da função é o parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ (figura ao lado).

d) Temos que o gráfico de h_4 é dado por

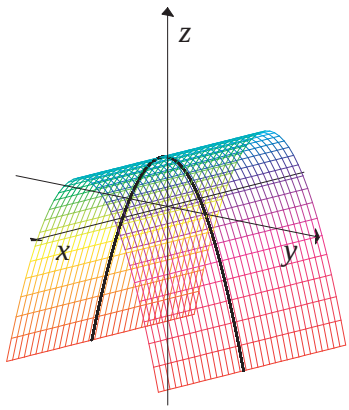
$$Gr(h_4) = \left\{ \left(x, y, e^{-(x^2+y^2)}\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$



Neste caso, observe que, as variáveis x e y só aparece na forma $(\sqrt{x^2 + y^2})^2$. Estamos portanto diante de uma superfície de revolução. Desta forma, para descobrir a função $z = f(y)$ (ou $z = g(x)$), cuja rotação do gráfico resultou na superfície em questão, vamos substituir o termo $(x^2 + y^2)$ na expressão de h_4 por y^2 (ou por x^2). Encontramos assim, a função $z = f(y) = e^{-y^2}$ (ou a função $z = g(x) = e^{-x^2}$). Temos então, que o gráfico de h_4 é a superfície gerada pela rotação da curva $z = e^{-y^2}$, no plano yz, em torno do eixo z (ou, o que dá no mesmo, a rotação da curva $z = e^{-x^2}$, no plano xz, em torno do eixo z) (figura ao lado).

e) Temos que o gráfico de h_5 é dado por

$$Gr(h_5) = \left\{ \left(x, y, 1 - y^2\right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

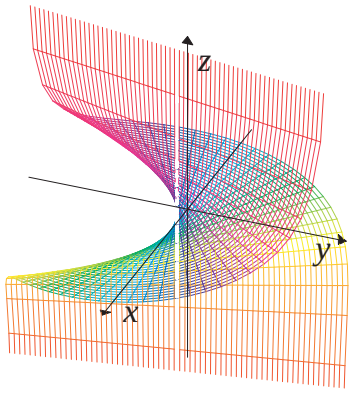


Neste caso, observe que, **no plano** yz, a equação $z = 1 - y^2$, é a equação de uma parábola. Portanto, em $\mathbb{R}^3$, a equação $z = 1 - y^2$ é a equação de um cilindro cuja diretriz é a parábola $z = 1 - y^2$, no plano yz, e cuja geratriz é paralela ao eixo x. Este cilindro é chamado de *cilindro parabólico* (figura ao lado).

f) Temos que o gráfico de h_6 é dado por

$$Gr(h_6) = \left\{ \left(x, y, \frac{y}{x-1} \right) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 1 \right\}.$$

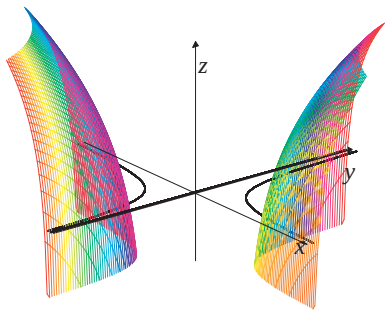
Lembre-se que vimos, no Exemplo 3.3.1 (e), que $Dom(h_6) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 1\}$. Na figura ao lado, temos o gráfico esboçado pelo Maple V. Embora seja difícil visualizar, procure observar que a reta dada pela interseção dos planos $x = 1$ e $y = 0$ (reta paralela ao eixo z que contém o ponto $(1,0,0)$) não pertence ao gráfico da função. Mais ainda, temos que o gráfico de h_6 não intercepta o plano $x = 1$ e, quanto mais o valor da abscissa de pontos (x,y) do domínio se aproximam de $x = 1$, maior, em módulo, será a imagem deste ponto. Imagine mais ou menos uma "vareta" infinita sobre o eixo x, transpassada pelo eixo paralelo ao eixo z que contém o ponto $(1,0,0)$, de forma que consiga girar em torno deste. Então, imagine a "vareta" girando em sentido anti-horário, ao mesmo tempo que vai subindo ao longo do eixo de rotação. Quanto mais a "vareta" estiver se aproximando do plano $x = 1$, mais afastada ela irá ficando do plano xy. Por outro lado, imagine a "vareta" girando em sentido horário, ao mesmo tempo que vai descendo ao longo do eixo de rotação. Quanto mais a "vareta" também estiver se aproximando do plano $x = 1$, mais afastada ela irá ficando do plano xy. Mais distante do plano xy estará, quanto mais estiver se aproximando do plano $x = 1$. Note que o processo de "colocar" as curvas de nível k na altura $z = k$, facilita a visualização do gráfico.



g) Temos que o gráfico de h_7 é dado por

$$Gr(h_7) = \{(x,y,\ln(xy-1)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x,y) \in Dom(h_7)\}.$$

Lembre-se que vimos, no Exemplo 3.3.1 (f), que $Dom(h_7) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}$. Na figura ao lado temos o esboço do gráfico da função realizado pelo Maple V. Apesar de ser de difícil visualização, observe que o processo de "colocar" as curvas de nível k na altura $z = k$, faz com que o gráfico de h_7 esboçado pareça bastante razoável.



♡

Vamos agora nos concentrar em funções reais de três variáveis reais.

3.7 Funções Reais de Três Variáveis Reais

Vamos estudar agora com mais detalhes as funções reais de três variáveis reais. Isto é, funções f da forma

$$\begin{array}{rccc} f & : & Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z). \end{array}$$

Vamos iniciar identificando e esboçando o domínio de algumas funções de três variáveis reais.

Exemplo 3.7.1: Determine e esboce o domínio das funções definidas pelas expressões abaixo.

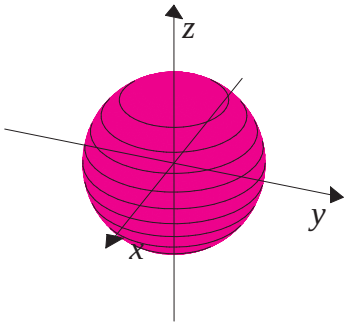
a) $f_1(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$.
b) $f_2(x,y,z) = \sqrt{1-z}$.
c) $f_3(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x-y-z}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.

Solução:

a) Neste caso, para podermos calcular a raiz de $1-x^2-y^2-z^2$, que aparece na expressão de f_1, devemos ter $1-x^2-y^2-z^2 \geq 0$. Desta forma, segue que

$$Dom(f_1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}.$$

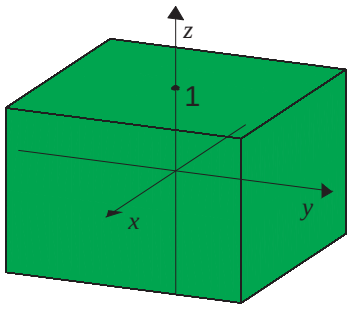
Temos portanto, que o domínio da função é a esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ e seu interior (figura ao lado).



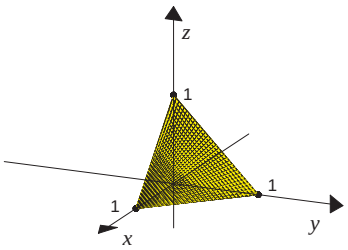
b) Neste caso, para podermos calcular a raiz de $1-z$ que aparece na expressão de f_2, devemos ter $1-z \geq 0$. Portanto, segue que

$$Dom(f_2) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z \leq 1\}.$$

Temos portanto, que o domínio da função f_2 é a região do espaço abaixo do plano $z = 1$, incluindo o próprio plano $z = 1$.



c) Neste caso, para podermos calcular a raiz de $1-x-y-z$ que aparece na expressão de f_3, devemos ter $1-x-y-z \geq 0$. Além disso, como o termo $\sqrt{1-x-y-z}$ está no denominador da função f_3, é necessário ter $1-x-y-z \neq 0$. Portanto, segue que



$$Dom(f_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y+z < 1, x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } z \geq 0\}.$$

Temos portanto, que o domínio da função f_3 é a região do primeiro octante limitada pelo do plano $x+y+z=1$, excluindo o próprio plano $x+y+z=1$.

♡

3.8 Exemplos de Funções Reais de Três Variáveis Reais

Veremos a seguir exemplos de alguns tipos de funções reais de três variáveis reais.

Exemplo 3.8.1: (Função Polinomial) Uma *função polinomial* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \sum_{m+n+k \leq p} a_{mnk} x^n y^m z^k,$$

onde p é um natural fixo e os coeficientes a_{mnk} são números reais dados. A soma é estendida a todas soluções (m,n,k), m, n e k naturais, da inequação $m+n+k \leq p$.

Exemplo: $f(x,y,z) = 2x^5y^2z + x^2y^3z^3 + z^2$.

Exemplo 3.8.2: (Função Afim) Uma *função afim* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = ax + by + cz + d,$$

onde a, b, c e d são números reais dados.

Exemplo: $f(x,y,z) = 2x + 7y + \dfrac{\sqrt{5}}{7}z + 3$.

Exemplo 3.8.3: (Função Linear) Uma *função linear* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = ax + by + cz,$$

onde a, b e c são números reais dados.

Exemplo: $f(x,y,z) = 2x + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\, y + z.$

Exemplo 3.8.4: (Função Racional) Uma *função racional* de três variáveis reais a valores reais é uma função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \frac{p(x,y,z)}{q(x,y,z)},$$

onde p e q são funções polinomiais dadas. Temos, neste caso, que $Dom(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, q(x,y,z) \neq 0\}$.

Exemplo: $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2 + 7y^3 + z^2}{xy + xz}$. Neste caso, observe que

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy + xz \neq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x(y+z) \neq 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \neq 0 \text{ e } y + z \neq 0\}. \end{aligned}$$

Portanto, o domínio de f é todo $\mathbb{R}^3$, menos o plano $x = 0$ e plano $y + z = 0$.

3.9 Superfícies de Nível de Funções Reais de Três Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, dado $k \in Im(f)$, temos que o conjunto de nível da função f correspondente ao nível k é o subconjunto do domínio dado por

$$S_k(f) = \{(x,y,z) \in Dom(f) \,|\, f(x,y,z)) = k\}.$$

No caso em questão, que é o das funções reais de três variáveis reais, os conjuntos de nível de f são superfícies. Por este motivo, os conjuntos de nível de funções reais de três variáveis reais são chamados de *superfícies de nível*. Em alguns casos, temos que superfícies de nível podem se degenerar em curvas e até em pontos.

Observação 3.9.1: Como sabemos que f é constante ao longo das superfícies de nível, observe que duas superfícies de nível de uma função f correspondentes aos níveis k_1 e k_2, onde $k_1 \neq k_2$, não podem se interceptar.

Vamos agora fazer alguns exemplos.

Exemplo 3.9.1: Determine e esboce as superfícies de nível das funções dadas abaixo.

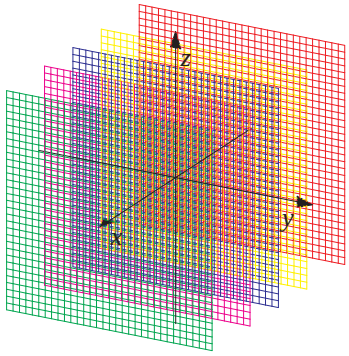
a) $h_1(x, y, z) = x$.
b) $h_2(x, y, z) = x^2 + y^2$.
c) $h_3(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2$.
d) $h_4(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ e $z \geq 0$.
e) $h_5(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Solução:

a) Neste caso, observe que $Dom(h_1) = \mathbb{R}^3$ e que $Im(h_1) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, as superfícies de h_1 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = k\},$$

ou seja, as superfícies de nível de h_1 são planos paralelos ao plano yz. Por exemplo,
para $k = 0$, temos o plano $x = 0$;
para $k = 1$, temos o plano $x = 1$;
para $k = 2$, temos o plano $x = 2$;
para $k = -1$, temos o plano $x = -1$;
para $k = -2$, temos o plano $x = -2$.
As superfícies de nível de h_1 encontram-se esboçadas ao lado.



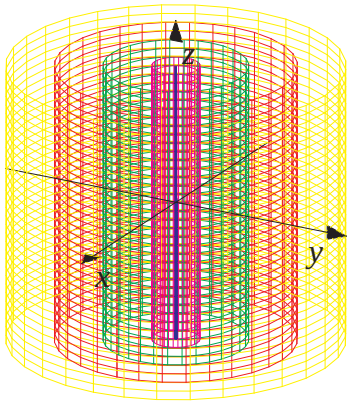
b) Neste caso, observe que $Dom(h_2) = \mathbb{R}^3$ e que a imagem de h_2 é

$$Im(h_2) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k \geq 0\}.$$

Desta forma, temos que para todo $k \geq 0$, as superfícies de nível de h_2 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = k\}.$$

Observe que para $k = 0$, temos que a superfície de nível de h_2 é da forma $x^2 + y^2 = 0$, o que corresponde ao eixo z. Já para cada $k > 0$, temos que a superfície de nível de h_2 correspondente ao nível k é da forma $x^2 + y^2 = k > 0$, o que corresponde a cilindros circulares retos concêntricos (figura ao lado). De fato, por exemplo
para $k = 0$, temos $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ e $y = 0$, que é a reta $(x, y, z) = (0, 0, z)$, $z \in \mathbb{R}$;
para $k = 1$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 1$;
para $k = 2$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 2$;
para $k = 3$, temos o cilindro $x^2 + y^2 = 3$.

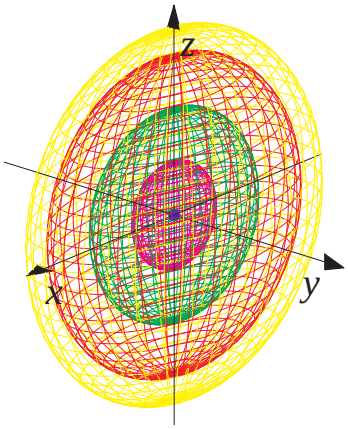


c) Neste caso, observe que $Dom(h_3) = \mathbb{R}^3$ e que a imagem de h_3 é

$$Im(h_3) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k \geq 0\}.$$

Desta forma, temos que para todo $k \geq 0$, as superfícies de nível de h_3 correspondentes ao nível k são dadas por

$$S_k(h_3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + 4y^2 + z^2 = k\}.$$



Observe que para $k = 0$, temos que a superfície de nível de h_3 se degenera em apenas um ponto, que é a origem $(0, 0, 0)$. Já para cada $k > 0$, temos que a superfície de nível de h_3 correspondente ao nível k é da forma $x^2 + 4y^2 + z^2 = k > 0$, o que corresponde a elipsóides concêntricos (figura ao lado). De fato, por exemplo
para $k = 0$, temos $x^2 + 4y^2 + z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, que é a origem $(0, 0, 0)$;
para $k = 1$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$;
para $k = 2$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 2$;
para $k = 3$, temos o elipsóide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 3$.

d) Neste caso, observe que

$$Dom(h_4) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + y + z < 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

e que a imagem de h_4 é

$$Im(h_4) = \{k \in \mathbb{R} \,|\, k \geq 1\}.$$

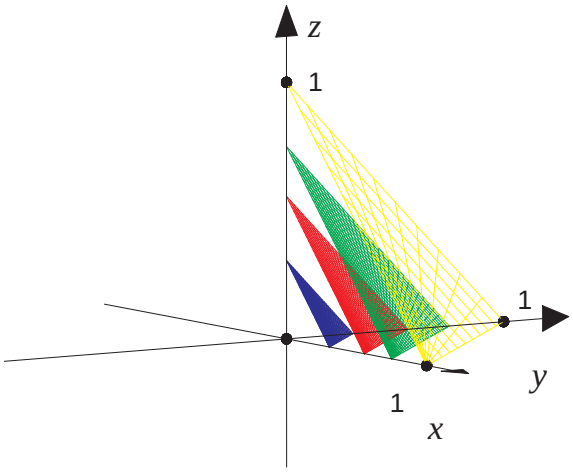
De fato, como $x + y + z < 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, temos que

$$0 \leq x + y + z < 1 \Leftrightarrow -1 < -x - y - z \leq 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x - y - z \leq 1,$$

de modo que $\dfrac{1}{1 - x - y - z} \geq 1$ e, portanto, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}} \geq 1$. Desta forma, temos que, para todo $k \geq 1$, as superfícies de nível de h_4 correspondentes ao nível k são dadas por

$$\begin{aligned}
S_k(h_4) &= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \;\middle|\; \frac{1}{\sqrt{1 - x - y - z}} = k\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \;\middle|\; \sqrt{1 - x - y - z} = \frac{1}{k}\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \;\middle|\; 1 - x - y - z = \frac{1}{k^2}\right\} \\
&= \left\{(x, y, z) \in Dom(h_4) \;\middle|\; x + y + z = 1 - \frac{1}{k^2}\right\}
\end{aligned}$$

Portanto, temos que as superfícies de nível de h_4 correspondentes ao nível k ($k \geq 1$) são da forma $x + y + z = 1 - \dfrac{1}{k^2}$, o que corresponde a planos paralelos ao plano $x + y + z = 1$, contidos no tetraedro $x + y + z < 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (excetuando a face $x + y + z = 1$) (figura abaixo). Por exemplo,
para $k = 1$, temos $x + y + z = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, pois $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;
para $k = 2$, temos o plano $x + y + z = 1 - \dfrac{1}{4}$;
para $k = 3$, temos o plano $x + y + z = 1 - \dfrac{1}{9}$;
para $k = 4$, temos o plano $x + y + z = 1 - \dfrac{1}{16}$.



Se tivéssemos tido dificuldade em encontrar a imagem de h_4, poderíamos utilizar a forma reversa utilizada para funções reais de duas variáveis, que consiste em apenas supor que $k \in Im(h_4)$ e tentar descobrir as superfícies de nível k de h_4, esperando que, neste processo, as restrições sobre k se tornem claras. Desta forma, teríamos que solucionar $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-y-z}} = k$, $k \in Im(h_4)$. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x-y-z}} = k, k > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1-x-y-z} = \frac{1}{k}, k > 0 \\
&= \quad 1 - x - y - z = \frac{1}{k^2},\ k > 0 \text{ e } 0 \leq x + y + z < 1 \\
&= \quad x + y + z = 1 - \frac{1}{k^2},\ k > 0 \text{ e } 0 \leq x + y + z < 1.
\end{aligned}$$

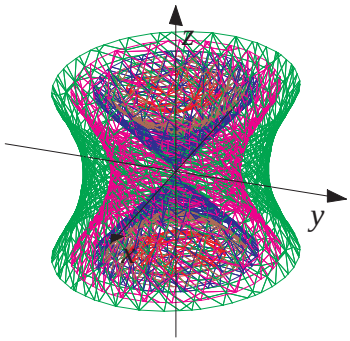
Neste processo, constatamos que só há soluções para $(x, y, z) \in Dom(h_4)$ para a equação $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-y-z}} = k$ se

$$0 \leq 1 - \frac{1}{k^2}\big(= x+y+z\big) < 1,\ k>0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq -\frac{1}{k^2} < 0,\ k>0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{k^2} \leq 1,\ k>0$$
$$\Leftrightarrow \quad k^2 \geq 1,\ k>0$$
$$\Leftrightarrow \quad k \geq 1$$

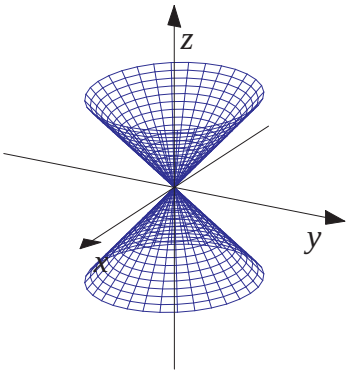
Isto significa que $Im(h_4) = [1, \infty)$.

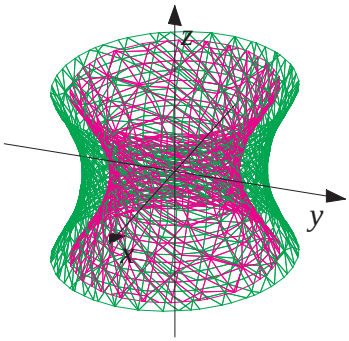
e) Neste caso, observe que $Dom(h_5) = \mathbb{R}^3$ e que $Im(h_5) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que para todo k real, as superfícies de nível de h_5 correspondentes ao nível k são da forma

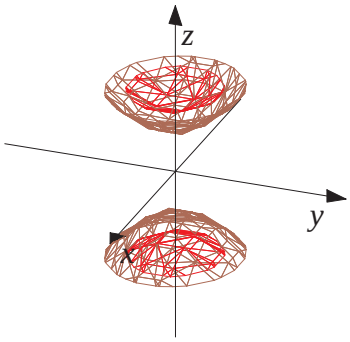
$$S_k(h_5) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 - z^2 = k\}.$$



Portanto, vamos ter três casos diferentes:
– para $k = 0$, temos que as superfície de nível de h_5 é o cone $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
– para cada $k > 0$, temos que a superfície de nível de h_5 correspondente ao nível k é da forma $x^2 + y^2 - z^2 = |k|$. Temos assim, que as superfícies de nível de h_5 são hiperbolóides de uma folha;
– para cada $k < 0$, temos que a superfície de nível de h_5 correspondente ao nível k é da forma $z^2 - x^2 - y^2 = |k|$. Temos assim, que as superfícies de nível de h_5 são hiperbolóides de duas folhas.







3.10 Gráficos de Funções Reais de Três Variáveis

Seja $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Conforme já sabemos, temos que o gráfico da função f é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$Gr(f) = \{(x, y, z, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x, y, z) \in Dom(f)\}.$$

No caso em questão, que são o das funções reais de três variáveis reais, atente para o fato de que os gráficos destas funções estão em $\mathbb{R}^4$, de modo que não é possível esboçá-los.

Exemplo 3.9.1: Determine o gráfico da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução: $Gr(f) = \{(x, y, z, x^2 + y^2) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

3.11 Exercícios

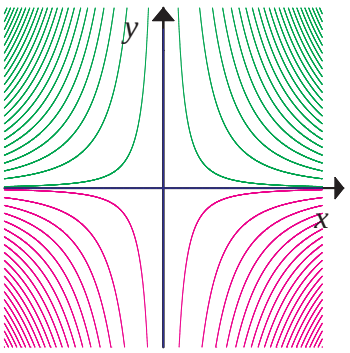
Exercício 3.11.1: Determine e esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = e^{x^2 y}$.

Resposta: Temos que $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ e $Im(f) = (0, \infty)$. As curvas de nível k, para $k > 0$, são dadas por

$$\begin{aligned} C_k(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, e^{x^2 y} = k\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 y = \ln k\}. \end{aligned}$$

Observe que se $k = 1$, temos que $x^2 y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$. Portanto, as curvas de nível 1 de f são os eixos coordenados. Se $0 < k < 1$ ou se $k > 1$, as curvas de nível de f são dadas pela equação $y = \dfrac{\ln k}{x^2}$. Note que se $0 < k < 1$, $\ln k < 0$, de modo que as curvas estão abaixo do eixo x e se $k > 1$, $\ln k > 0$, de modo que as curvas estão acima do eixo x. Abaixo temos um esboço das curvas de nível.

As curvas de nível $k = 1$ (eixos coordenados) estão esboçadas em azul, as curvas de nível $k > 1$ estão esboçadas em verde e as curvas de nível $0 < k < 1$ estão esboçadas em rosa.



Exercício 3.11.2: Determine e esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

Resposta: Inicialmente, observe que

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq -x\}$$

e que $Im(f) = \mathbb{R}$. Desta forma, temos que, para todo k real, o conjunto de nível k de f é dado por

$$C_k(f) = \left\{(x,y) \in Dom(f) \mid \frac{xy}{x+y} = k\right\}.$$

Para $k = 0$, temos que as curvas de nível zero de f são as semi-retas $x = 0$ e $y = 0$, $(x,y) \neq (0,0)$. Já se $k \neq 0$, temos que $\dfrac{xy}{x+y} = k \Leftrightarrow xy = k(x+y) \Leftrightarrow y(x-k) = kx$, $x \neq -y$. Portanto, a curva de nível $k \neq 0$ de f é o gráfico das função $g_k(x) = \dfrac{kx}{x-k}$, $x \neq k$, retirando os pontos que pertencem à reta $x = -y$ (pois estes pontos não pertencem ao domínio de f). Para descobrir que pontos do gráfico de g_k devem ser retirados, procedemos com a seguir.

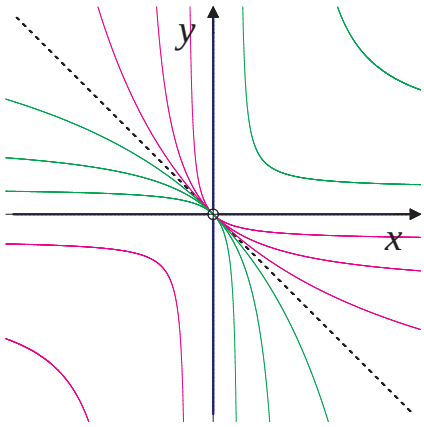
$$x \neq -y \text{ e } y = \frac{kx}{x-k} \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -\frac{kx}{x-k} \Leftrightarrow x^2 - kx \neq -kx \Leftrightarrow x \neq 0.$$

Desta forma, então temos que as curvas de nível zero de f são as semi-retas $x = 0$ e $y = 0$, $(x,y) \neq (0,0)$ e que as curvas de nível $k \neq 0$ de f são formadas pelos gráficos das função $g_k(x) = \dfrac{kx}{x-k}$, $x \neq k$, retirando-se a origem.

Abaixo, temos exemplos de curvas de nível de f relativas a diferentes valores de k escolhidos.

Para $k = 1$, a curva de nível de f é dada por $y = \dfrac{x}{x-1}$, com $x \neq 0$.
Para $k = 2$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{2x}{x-2}$, com $x \neq 0$.
Para $k = 3$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{3x}{x-3}$, com $x \neq 0$.
Para $k = -1$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-x}{x+1}$, com $x \neq 0$.
Para $k = -2$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-2x}{x+2}$, com $x \neq 0$.
Para $k = -3$, a curva de nível de f é dada por que $y = \dfrac{-3x}{x+3}$, com $x \neq 0$.

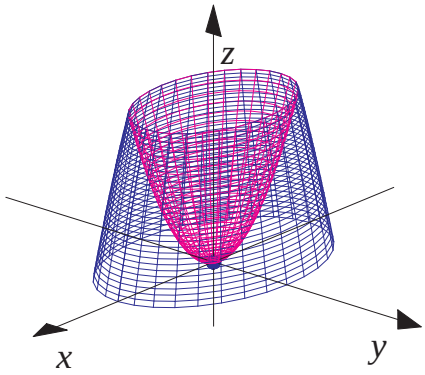
Algumas curvas de nível de f encontram-se esboçadas abaixo.



Exercício 3.11.3: Determine e esboce o gráfico e as curvas de nível da função

$$f(x,y) = \begin{cases} 4x^2+9y^2, & \text{se } 4x^2+9y^2 \leq 36 \\ 72-(4x^2+9y^2), & \text{se } 36 \leq 4x^2+9y^2 \leq 72 \end{cases},$$

.



Exercício 3.11.4: Determine e esboce as curvas de nível da função $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Solução:

f) Neste caso, observe que $Dom(f_6) = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Como a imagem de f_6 não é imediata, diferente do que aconteceu nos exemplos anteriores, vamos deixar para determiná-la mais tarde. Supondo então conhecida a imagem de f_6, temos que, para todo $k \in Im(f_6)$, o conjunto de nível k de f_6 é dado por

$$C_k(f_6) = \left\{ (x,y) \in Dom(f_6) \;\middle|\; \frac{xy^2}{x^2+y^4} = k \right\}.$$

Observe que $k = 0 \in Im(f_6)$, e que o conjunto de nível 0 de f_6 é dado por

$$C_0(f_6) = \{(x,y) \in Dom(f_6) \,|\, x = 0 \text{ ou } y = 0\}.$$

Vamos supor agora que $k \neq 0$ é um elemento da $Im(f_6)$. Desenvolvendo então a

igualdade $\frac{xy^2}{x^2+y^4} = k$, para $0 \neq k \in Im(f_6)$, temos que

$$\frac{xy^2}{x^2+y^4} = k \quad \Leftrightarrow \quad xy^2 = kx^2 + ky^4 \Leftrightarrow kx^2 - y^2x + ky^4 = 0.$$

Resolvendo a equação acima em x, segue que

$$x = \frac{y^2 \pm y^2\sqrt{1-4k^2}}{2k}.$$

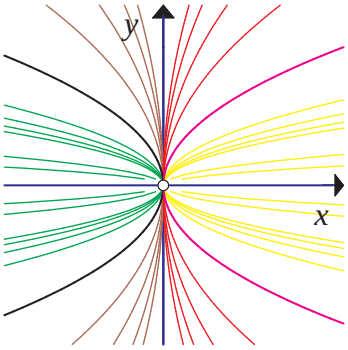
De posse da equação anterior, temos que, dado y real, $y \neq 0$, para obtermos x real, devemos ter que $1 - 4k^2 \geq 0, k \neq 0 \Leftrightarrow k^2 \leq \frac{1}{4}, k \neq 0 \Leftrightarrow |k| \leq \frac{1}{2}, k \neq 0 \Leftrightarrow k \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$. Sendo assim, para $k \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$, temos que o conjunto de nível k de f_6 é dado por

$$C_k(f_6) = \left\{(x,y) \in Dom(f_6) \;\middle|\; x = y^2\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)\right\},$$

ou seja, as curvas de nível k ($k \neq 0$) de f_6 são as parábolas $x = y^2\left(\frac{1 \pm \sqrt{1-4k^2}}{2k}\right)$, com $(x,y) \neq (0,0)$.

Por exemplo,
para $k = 1/2$, temos a parábola $x = y^2$, $(x,y) \neq (0,0)$;
para $k = 1/3$, temos as parábolas $x = y^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $x = y^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$;
para $k = 1/4$, temos as parábolas $x = y^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ e $x = y^2\left(2-\sqrt{3}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$;
para $k = -1/2$, temos a parábola $x = -y^2$, $(x,y) \neq (0,0)$;
para $k = -1/3$, temos as parábolas $x = -y^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e $x = -y^2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$;
para $k = -1/4$, temos as parábolas $x = -y^2\left(2+\sqrt{3}\right)$ e $x = -y^2\left(2-\sqrt{3}\right)$, $(x,y) \neq (0,0)$;
As curvas de nível de f_6 encontram-se esboçadas abaixo.

Observe que, de acordo com as observações anteriores, só encontramos soluções x e y reais para a equação $\frac{xy^2}{x^2+y^4} = k$ quando $k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Isto significa que $Im(f_6) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.



Exercício 3.11.5: Faça os exercícios da Lista 1.